Eng. André Queiroz
Eng. Civil – Especialista em Hidráulica
Tecnologia e Processo / Cetrel

EQUACIONAMENTO MATEMÁTICO DE CURVAS DE PERFORMANCE DE BOMBAS CENTRÍFUGAS

Objetivo:

Esse artigo visa apresentar duas metodologias matemáticas de aplicação simples e muito vantajosas para o equacionamento matemático de curvas de performance de bombas centrífugas.

Muitas vezes nos deparamos com esse assunto, sendo necessário realizar ajustes aproximados de leituras de pontos com vazão de bombeamento *versus* altura manométrica de pontos de trabalho de bombas centrífugas, para determinação gráfica (menos precisa) de concordância entre a curva do equipamento e a curva do sistema.

Com a presente metodologia, poder-se-á dispor de uma equação matemática do equipamento, a qual poderá ser associada à curva do sistema, para determinação analítica do ponto de trabalho.

A presente metodologia também pode ser associada às variáveis de rendimento, potência e de NPSH requerido do conjunto motor-bomba.

Metodologias Sugeridas

Em projetos de estações elevatórias, a curva do sistema (F1) é confrontada com a curva do conjunto motor-bomba (F2) a fim de serem determinados os pontos de trabalho nas diversas situações operacionais:

- Desnível geométrico máximo = HG.máx (NA.mín no poço de sucção);
- Desnível geométrico mínimo = HG.mín (NA.máx no poço de sucção);
- Conjuntos motor-bomba operando em associação;
- Conjunto motor-bomba operando isoladamente.

A fim de não se determinar estes pontos de trabalho graficamente (de forma aproximada...), é importante saber a função matemática de cada uma das curvas supra-referidas, para que haja uma abordagem analítica com solução exata do problema. As curvas em questão são:

- Curva do Sistema: $AMT.s = F1(Q^2) = HG + \Delta H.loc + \Delta H.dist$ → função conhecida!
- Curva da Bomba: $AMT.b = F2(Q^E)$ → a determinar conforme curva do fabricante.

A função $F2(Q^E)$ pode ser obtida por processos numéricos tomando como base pares ordenados (Qi;Hi) extraídos da curva do fabricante. Após o conhecimento da função $F2(Q^E)$, iguala a mesma com a função $F1(Q^2)$ e resolve-se o sistema de 02 equações a 02 incógnitas para se determinar a vazão Q (solução) que satisfaz ao problema. Em seguida, substitui a vazão Q em qualquer uma das funções e determina o valor de AMT (tal que AMT.s = AMT.b).

Sobre a função F1(Q²), temos as seguintes parcelas:

- Desnível HG(máx/mín) = NA.chegada - NA.sucção(mín/máx)
- Perdas de carga localizadas ΔH.loc = K.V²/2g = Kp.Q²   sendo Kp = K.16/(π².D⁴.2g)
  Nota1: Além da opção da taquicarga, outra opção para cálculo de ΔH.loc é por Leq.
- ΔH.dist = f.L.V²/(D.2g) = Kq.f.Q²   sendo: Kq = L.16/(π².D5.2g) e f(fricção)
  Nota2: Percebe-se claramente a razão porque F1 é uma dependência de Q².

  Portanto, F1(Q²) pode ser escrita da seguinte forma:

$$F1(Q^2) = AMT.s = HG + (Kp + Kq.f).Q^2$$

onde (Kp + Kq.f) > 0 (parábola com concavidade voltada para cima).

No tocante à função F2(Q^E) = AMT.b, serão aqui apresentadas 02 metodologias para a sua determinação, tendo em conta:

- Metodologia 1 - o motor opera sempre em sua rotação plena (N = Nm); e
- Metodologia 2 - o motor pode operar em rotação igual ou inferiorà sua rotação plena (N ≤ Nm), situação esta em que há um inversor de frequência instalado no sistema.

Nesta função F2(Q^E), o valor do expoente E dependerá de qual metodologia será utilizada para a determinação desta função.

<u>Metodologia 1</u>

Polinômio <u>INTERPOLATIVO</u> de Grau 4 (ou seja, E = 4), <u>SEM dependência de N</u>

A.M.T. = A4 * Q^4 + A3 * Q^3 + A2 * Q^2+ A1 * Q + A0   Função F2(Q^4)   [A.M.T.] = m   [Q] = m^3 / s

Pontos escolhidos nos rotores das bombas para cálculo dos coeficientes A4, A3, A2, A1 e A0 :

	Ponto	Q_{1B} (m^3/s)	A.M.T. (m)	Coef.	01 B	02 B //	03 B //
	P1	0,11111	58,50	A0 =	208,578393	208,578392	208,5783896
	P2	0,12500	56,50	A1 =	-3707,5397	-1853,7698	-1235,84657
P3 veio de F1(Q²) →	P3	0,13889	54,81	A2 =	34363,5848	8590,89617	3818,176125
	P4	0,16667	50,50	A3 =	-141396,06	-17674,507	-5236,891094
	P5	0,27778	33,50	A4 =	207246,273	12952,8921	2558,596011

Na determinação dos 05 coeficientes A4, A3, A2, A1, A0 do polinômio representativo de F2(Q^4), tomam-se 05 pontos Pi(Qi;Hi), com i de 1 a 5. Observe que o ponto P3 (i=3) refere-se ao valor de Q e H(=AMT) obtido<u>antecipadamente</u> com a função F1(Q²) = curva do sistema.

É recomendável que os pontos P1 e P2 sejam tomados com suas abcissas (vazão - Q) antes da abcissa do ponto P3 (ou seja, Q3), e que os pontos P3 e P4 sejam tomados com suas abcissas (vazão - Q) após a abcissa do ponto P3.

Resulta Q1 < Q2 < Q3 < Q4 < Q5 (sendo que o ponto P1 não pode ser o *Shut-Off*!). Dos valores citados ao final da página anterior, temos que:

CÁLCULO DE COEFICIENTES DE POLINÔMIOS INTERPOLATIVOS ATÉ GRAU 4

X0 = Valor para mudança de base das abcissas
Y0 = Valor para mudança de base das ordenadas
Quantidade de pares de valores (X,Y) = | 5 |

i	Xi	X0	Yi	Y0	Xri=(Xi-X0)	Yri=(Yi-Y0)
1	0,111	0,000	58,500	0,000	1,1111E-01	5,8500E+01
2	0,125	0,000	56,500	0,000	1,2500E-01	5,6500E+01
3	0,139	0,000	54,812	0,000	1,3889E-01	5,4812E+01
4	0,167	0,000	50,500	0,000	1,6667E-01	5,0500E+01
5	0,278	0,000	33,500	0,000	2,7778E-01	3,3500E+01

A matriz dos coeficientes das equações lineares utilizadas para a determinação dos coeficientes do polinômio de grau 4 é denominada [Ce] e é do tipo Quadrada (ou seja, pode ser invertida...), com dimensão 4x4 (número de linhas = número de colunas).

A matriz dos termos independentes das equações lineares utilizadas para a determinação dos coeficientes do polinômio de grau 4 é denominada [I] e é do tipo Coluna, com dimensão 4x1 (linhas x colunas).

A matriz dos coeficientes do polinômio de grau 4 é denominada [Cp] e é também do tipo Coluna, com dimensão 4x1 (linhas x colunas), a qual é a solução a ser procurada.

Assim, o problema consiste em resolver o sistema matricial:

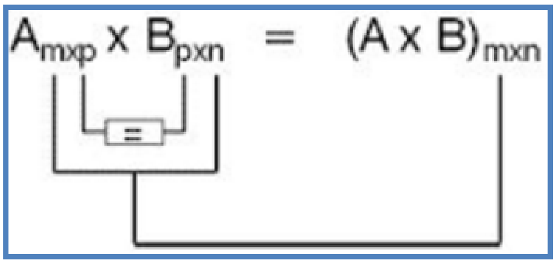
$$[\ Ce].[Cp\ ] = [\ I\ ] \rightarrow \qquad [\ Cp\ ] = [\ I\ ]/[\ Ce\ ]$$

Como não há divisão de matrizes (apenas produto de matrizes...), recorre-se à inversa (diz-se "Jacobiano") de [Ce] = $[\ Ce\ ]^{-1}$, e a solução do sistema passa a ser:

$$[\ Ce\ ]^{-1}_{4x4}\ .[\ I\ ]_{4x1} = [\ Cp\ ]_{4x1}$$

<u>Atenção:</u> Verificar previamente o valor do determinante de [Ce]... (porque?)

Em termos das dimensões das matrizes, a condição que permite a operação do produto e a dimensão da matriz resultante podem ser visualizadas na figura a seguir:



Assim, resulta que: (Regressão Polinomial)

SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES PARA DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DO POLINÔMIO

$$\begin{bmatrix} N & \Sigma Xri & \Sigma(Xri)^2 & \Sigma(Xri)^3 & \Sigma(Xri)^4 \\ \Sigma Xri & \Sigma(Xri)^2 & \Sigma(Xri)^3 & \Sigma(Xri)^4 & \Sigma(Xri)^5 \\ \Sigma(Xri)^2 & \Sigma(Xri)^3 & \Sigma(Xri)^4 & \Sigma(Xri)^5 & \Sigma(Xri)^6 \\ \Sigma(Xri)^3 & \Sigma(Xri)^4 & \Sigma(Xri)^5 & \Sigma(Xri)^6 & \Sigma(Xri)^7 \\ \Sigma(Xri)^4 & \Sigma(Xri)^5 & \Sigma(Xri)^6 & \Sigma(Xri)^7 & \Sigma(Xri)^8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \Sigma Yri \\ \Sigma(Yri.Xri) \\ \Sigma(Yri.Xri^2) \\ \Sigma(Yri.Xri^3) \\ \Sigma(Yri.Xri^4) \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5{,}0000E+00 & 8{,}1944E-01 & 1{,}5220E-01 & 3{,}2067E-02 & 7{,}4940E-03 \\ 8{,}1944E-01 & 1{,}5220E-01 & 3{,}2067E-02 & 7{,}4940E-03 & 1{,}8816E-03 \\ 1{,}5220E-01 & 3{,}2067E-02 & 7{,}4940E-03 & 1{,}8816E-03 & 4{,}9370E-04 \\ 3{,}2067E-02 & 7{,}4940E-03 & 1{,}8816E-03 & 4{,}9370E-04 & 1{,}3286E-04 \\ 7{,}4940E-03 & 1{,}8816E-03 & 4{,}9370E-04 & 1{,}3286E-04 & 3{,}6264E-05 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz Principal dos coeficientes das equações do Sistema [Ce]}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 2{,}5381E+02 \\ 3{,}8898E+01 \\ 6{,}6500E+00 \\ 1{,}2893E+00 \\ 2{,}8152E-01 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz dos termos independentes [I]}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 581387{,}0189 & -15109712{,}22 & 142798427{,}9 & -578025372 & 837531890{,}2 \\ -15109712{,}22 & 392859272{,}8 & -3714310873 & 15040168224 & -21798531631 \\ 142798427{,}9 & -3714310873 & 35130186508 & -1{,}42297E+11 & 2{,}06292E+11 \\ -578025372 & 15040168224 & -1{,}42297E+11 & 5{,}76547E+11 & -8{,}3603E+11 \\ 837531890{,}2 & -21798531631 & 2{,}06292E+11 & -8{,}3603E+11 & 1{,}21252E+12 \end{bmatrix}}_{\text{Inversa da Matriz Principal dos coeficientes das equações do Sistema}}$$

(Jacobiano) $[\ J\ ] = [\ Ce\ ]^{-1}$

Para cálculo da matriz inversa [J] e do resultado da matriz procurada [Cp], fez-se uso de funções específicas disponíveis em planilha Excel, a saber:

- "MATRIZ.INVERSO" para cálculo do Jacobiano [J]; e
- "MATRIZ.MULT" para cálculo da matriz [Cp].

Por fim, matriz coluna [Cp] com os valores dos coeficientes do polinômio procurado é:

Coeficientes calculados para o Polinômio de Grau 4

Forma do Polinômio : $Y = A4 . X^4 + A3 . X^3 + A2 . X^2 + A1 . X + A0$

A0 =	208,5783925
A1 =	-3707,539721
A2 =	34363,58476
A3 =	-141396,0572
A4 =	207246,2733

Matriz Solução = Coeficientes do Polinômio = [Cp] = [J].[I]

<u>Importante:</u> Neste exemplo, Y = H (AMT) e X = Q (vazão), com seus valores em unidades coerentes, ou seja, AMT em "mca" e a vazão Q em "m³/s".

<u>Metodologia 2</u>

Função Quadrática de Grau 2 (ou seja, E = 2) <u>COM dependência da rotação N</u>

Conforme visto anteriormente (em "Curvas Características de uma Bomba"), a curva de performance de uma bomba pode ser representada como uma relação das grandezas Q (vazão), AMT (altura manométrica) e N (rotação do equipamento), mediante a equação:

$$H = - C.Q^2 + B.N.Q + A.N^2$$

Do exposto, nesta metodologia a função $F2(Q^E)$ = H (=AMT) possui valor de E = 2, sendo assim uma parábola com concavidade voltada para baixo (coeficiente de Q2 é -C, sinal negativo), ao contrário da função $F1(Q^2)$ que, conforme já visto, possui concavidade voltada para cima. E são necessários apenas 03 pontos Pi(Qi;Hi), com i = 1,2,3.

Para fins comparativos de resultados entre as Metodologias 1 e 2, serão utilizados os pontos P1, P3 e P5 da Metodologia 1 como sendo os pontos P1, P2 e P3 da Metodologia 2. Assim:

Points of Equipment Performance Curve on Condition of N = No		
Point1 - Flow	400,00	m^3/h
	0,11111	m^3/s
Point1 - Total Pump Head (TPH)	58,50	mwc
Point1 - Hydraulic Efficiency	65,0	%
Point2 (the pump duty point selected) -Flow	500,00	m^3/h
(The Point 2 is the initial design condition)	0,13889	m^3/s
Point2 (Point of selection of equipment) - TPH	54,81	mwc
Point2 - Hydraulic Efficiency	72,0	%
Point3 - Flow	1.000,00	m^3/h
	0,27778	m^3/s
Point3 - TPH	33,50	mwc
Point3 - Hydraulic Efficiency	60,0	%
Rotation at steady state conditions (without frequency converter = No)	1.780	rpm

Os rendimentos (na condição N = No) também foram aqui referidos pois a eficiência da máquina é modificada com a alteração da rotação do equipamento, o que necessita também ser avaliado...

Mas, voltando à determinação dos coeficientes A, B e C, temos que:

$$\begin{bmatrix} N^2 & N.Q1 & -Q1^2 \\ N^2 & N.Q2 & -Q2^2 \\ N^2 & N.Q3 & -Q3^2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} AMT1 \\ AMT2 \\ AMT3 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3.168.400 & 197,7777778 & -0,0123 \\ 3.168.400 & 247,2222222 & -0,0193 \\ 3.168.400 & 494,4444444 & -0,0772 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz [Ce]}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 58,50 \\ 54,81 \\ 33,50 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz [I]}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2,63E-06 & -2,52493E-06 & 2,1E-07 \\ -0,050562 & 0,056629213 & -0,0061 \\ -216 & 259,2 & -43,2 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz [J] = [Ce]}^{-1}} \qquad \begin{array}{l} \text{Determinante:} \\ -3626383,745 \end{array}$$

Os coeficientes da curva desejada são:

			Verificação com N = No:	
A =	2,25153E-05	[m / (rpm)²]	58,5	OK!
B =	-0,057163146	[m / rpm / (m³ / s)]	54,812	OK!
C =	124,0704	[m / (m³ / s)²]	33,5	OK!

Matriz [Cp]

<u>Nota:</u> Ver Manual de Proteção contra o Golpe de Aríete (Almeida, 1981 / LNEC - Lisboa, Portugal)

Observe que a abordagem matemática, do ponto de vista matricial, utilizada aqui para a determinação dos coeficientes A, B e C, é praticamente a mesma descrita na resolução pela Metodologia 1 (pequenas diferenças...).
No que tange à avaliação da alteração do rendimento para rotações distintas da rotação plena do motor (N ≠ No), sugere-se a seguinte metodologia (Macintyre): $\eta i = 1 - (1 - \eta).(No / Ni)^{0,1}$

Para ilustrar, ao lado (→) pode ser visto o aspecto das curvas de performance da bomba conforme a variação de N.