

I-400 - COMPARATIVO ENTRE OS MÉTODOS HEURÍSTICOS, PARTICLE SWARM OPTIMIZATION E GENETIC ALGORITHMS NO DIMENSIONAMENTO ÓTIMO DE SISTEMAS ADUTORES DE ÁGUA

José Eloim Silva de Macêdo⁽¹⁾

Engenheiro Civil pela Universidade Federal de Pernambuco – Campus Acadêmico do Agreste (UFPE-CAA).
Mestrando em Engenharia Civil e Ambiental pela Universidade Federal de Pernambuco – Campus Acadêmico do Agreste.

Endereço⁽¹⁾: Rua Manoel Araújo da Silva, 31 – Tancredo Neves - Belo Jardim - PE - CEP: 55150-520 - Brasil
- Tel: (81) 9-9677-0645 - e-mail: eloim.macedo@ufpe.com.br

RESUMO

Na busca da otimização de sistemas de distribuição de água, devido aos altos custos de implantação e operação destes, projetistas e pesquisadores têm-se voltado a estudos de novos métodos de dimensionamento que proporcionem melhor performance e precisão, com baixo custo computacional. O dimensionamento ótimo de redes hidráulicas é um problema que admite inúmeras soluções. Algoritmos evolucionários, que são técnicas numéricas de otimização inspiradas em analogias com a natureza, vêm-se mostrando uma boa alternativa para esse tipo de cálculo, sendo bastante utilizados em aplicações e obtendo sucesso nas áreas de recursos hídricos. Um dos mais antigos nessa aplicação é o Algoritmo Genético (em inglês, *Genetic Algorithm* - GA), um método que apresenta um alto custo computacional. No âmbito de evitar grandes custos computacionais e mais rapidez na busca de um dimensionamento ótimo, surge o algoritmo de Otimização por Enxame de Partículas (em inglês, *Particle Swarm Optimization* - PSO) que apresenta, relativamente, menor complexidade computacional, e vem se mostrando bastante eficiente na otimização de sistemas de distribuição de água. Nesse trabalho foram utilizados os métodos PSO e GA, na obtenção do menor custo total (implantação + energia) para o mesmo exemplo na implantação de sistemas adutores, apresentando precisão e dinamismo na busca de um dimensionamento ótimo, e notado as diferenças entre esses dois métodos.

PALAVRAS-CHAVE: Algoritmos Evolucionários, Algoritmos Genéticos, Enxame de Partículas, Otimização de Adutoras.

INTRODUÇÃO

A otimização de sistemas de distribuição de água tem recebido atenção especial de projetistas e pesquisadores da área de recursos hídricos e saneamento devido aos altos custos de implantação e operação daqueles. O dimensionamento ótimo de redes hidráulicas é um problema matematicamente indeterminado que admite inúmeras soluções. Não existe um método de otimização que resolva eficientemente todos os tipos de problemas, e é por isso que, ao longo do tempo, pesquisadores têm desenvolvido várias técnicas de busca que adotam algoritmos matemáticos diferentes.

Os primeiros métodos propostos se restringiam à escolha dos diâmetros da rede hidráulica que proporcionassem o equilíbrio hidráulico do escoamento nas malhas do sistema (BEZERRA et al., 2009). No final da década de sessenta, a consolidação da microinformática em centros de pesquisa permitiu o desenvolvimento de técnicas direcionadas ao dimensionamento de redes hidráulicas. Os primeiros algoritmos de otimização empregados eram baseados em técnicas de programação linear (KARMELI et al., 1968), programação não-linear e programação dinâmica (LIANG, 1971).

Os anos oitenta do século passado marcaram o surgimento dos métodos heurísticos. A palavra “heurística” deriva do grego *heuriskein*, que significa “encontrar” ou “descobrir”. As chamadas técnicas heurísticas de otimização, geralmente, propõem modelos probabilísticos para encontrar a solução ótima de uma função a partir da observação de fenômenos naturais. Esses métodos não fornecem garantias de que a solução obtida é a melhor possível entre as existentes, porém convergem para uma solução muito próxima ao ótimo global (MEDEIROS e KRIPKA, 2012).

A classe de algoritmos heurísticos baseada na inteligência coletiva proveniente do estudo da sociedade de certos animais, denominada Swarm Intelligence, vem apresentando bons resultados para o dimensionamento de sistemas de distribuição de água, se destacando em pesquisas recentes. Entretanto, a maioria das aplicações destes métodos considera apenas a obtenção do custo mínimo na definição de seus parâmetros, que são ajustados por “tentativa e erro”. As pesquisas buscam a “melhor” solução de custo mínimo, mas não se aprofundam em outros aspectos, tais como o impacto do ajuste de parâmetros nas soluções finais, e o tempo computacional. A partir dos pressupostos citados, destaca-se que o desenvolvimento destes modelos se encontra na fronteira da ciência, pois alguns questionamentos ainda não foram plenamente respondidos pela comunidade científica.

OBJETIVO GERAL

Este projeto de pesquisa objetiva o desenvolvimento de um modelo, baseado na técnica de otimização *Particle Swarm Optimization* (PSO) e a *Genetic Algorithm* (GA), de dimensionamento de pequenas instalações de recalque de água, visando à minimização de custos em função do diâmetro ótimo de aplicação, avaliando e comparando a precisão e o custo computacional envolvido entre dois métodos.

METODOLOGIA UTILIZADA

Inicialmente, o algoritmo PSO e o GA, foram escolhidos por estarem se fundindo no estudo do dimensionamento hidráulico de adutoras de água. Fazendo-se uso desses algoritmos, implementou-se um modelo de otimização de uma instalação de recalque de água para cada método, em uma única ferramenta computacional, avaliando e comparando seu desempenho com a variação de diversos parâmetros inseridos aos diferentes métodos, a fim de obter boas soluções com um menor número de iterações e/ou tempo computacional, tendo como o modelo da instalação de recalque o proposto em Gomes(2004).

CUSTO TOTAL DE DIMENSIONAMENTO

O custo total de um sistema de recalque é composto de duas partes distintas: uma referente ao custo de implantação do sistema, e a outra a o custo energético, correspondendo na maiorias das vezes ao sistema de bombeamento de água para recalcar água a vazão de projeto.

O custo de implantação da tubulação de recalque pode ser dado pela equação 1, sendo L o comprimento total da tubulação, ou seja:

$$C_{\text{instalação}} = \lambda D L \quad \text{equação (1)}$$

O custo anual com energia (equação 2) é obtido mediante o produto da potência requerida, pelo número anual de horas de bombeamento e pelo custo unitário da energia

$$C_{\text{energia}} = \frac{9,81(H_g + h_f) n_b p}{\eta} \quad \text{equação (2)}$$

Na qual, H_{man} é a altura manométrica, que corresponde à altura geométrica (H_g) mais as perdas de carga (h_f), em m; η é o rendimento esperado do conjunto motor-bomba; n_b é o número anual de horas de bombeamento; p é o preço do kWh; e h_f corresponde às perdas de carga totais na instalação, que podem ser expressas, segundo a Fórmula de Darcy-Weisbach, para escoamento turbulento, conforme a equação 3, ou segundo a Fórmula de Hazen-Williams, conforme equação 4.

$$h_f = \frac{8f}{g\pi^2} L \frac{Q^2}{D^5} \quad \text{equação (3)}$$

Na qual, f é coeficiente de atrito do tubo; g é o valor da gravidade; Q é a vazão em m³/s; L é o comprimento da tubulação, em m; D é o diâmetro interno da tubulação, em m.

O coeficiente de atrito "f", presente na equação 3, pode ser obtido através da fórmula de Colebrook e White (regime de escoamento turbulento), apresentada pela equação 5:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{e/D}{3,7} + \frac{2,51}{R_e \sqrt{f}} \right) \quad \text{equação (5)}$$

Na qual, R_e é o número de Reynolds do escoamento, e e/D é a rugosidade relativa do tubo.

Através da equação 5, não se pode determinar diretamente o valor do coeficiente de atrito "f", apesar de que ele pode ser calculado por um processo iterativo simples. Com isso, existe uma fórmula que permite o cálculo direto de f, a fórmula de Swamee e Jain (1997), que pode ser utilizada para $10^3 \leq R_e \leq 10^8$ e $10^{-6} \leq e/D \leq 10^{-2}$, expressão pela equação 6.

$$f = \frac{0,25}{\left[\log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{0,37D} + \frac{5,74}{R_e^{0,9}} \right) \right]^2} \quad \text{equação (6)}$$

A diferença entre o valor de f, calculado através dessa última expressão, e o obtido mediante a equação de Colebrook e White, é, quase sempre, inferior a 10 %.

Os custos de implantação e de operação da instalação incidem em tempos distintos, já que o custo de implantação é fixo e atua no início do empreendimento, enquanto que o custo energético incide ao longo da vida útil do projeto. Diante disso, para que se possa somar os dois custos, deve-se amortizar o custo atual de implantação e adicionar o custo anual de energia, ou calcular o valor presente (atualizado) do custo energético, adicionando-o posteriormente ao custo fixo de implantação. Essa última alternativa foi utilizada neste trabalho, tendo o custo atualizado da energia dado pelo produto entre o custo energético anual e o coeficiente de atualização da energia "F_a", expresso pela equação 7:

$$F_a = \frac{(1+e)^n - (1+i)^n}{(1+e) \cdot (1+i)} \times \frac{1}{(1+e)^n} \quad \text{equação (7)}$$

Na qual, i é a taxa de juros anual (em decimal); e é a taxa de aumento anual da energia (em decimal); e n é o período de amortização (em anos), que normalmente considera-se como sendo igual à vida útil da instalação ou de projeto.

Assim, o custo total do sistema de recalque (de implantação e de operação) pode ser expresso pela equação 8.

$$C_{\text{total}} = \frac{9,81 \left(H_g + \beta L \frac{Q^2}{D^5} \right)^{n_b} P}{\eta} \times F_a + \lambda DL \quad \text{equação (8)}$$

O primeiro somando da equação 8 corresponde aos gastos atualizados com a energia (operação), enquanto o segundo corresponde aos custos fixos de implantação do sistema. Na Figura 1, podemos ver a representação dos custos, em função do diâmetro da adutora.

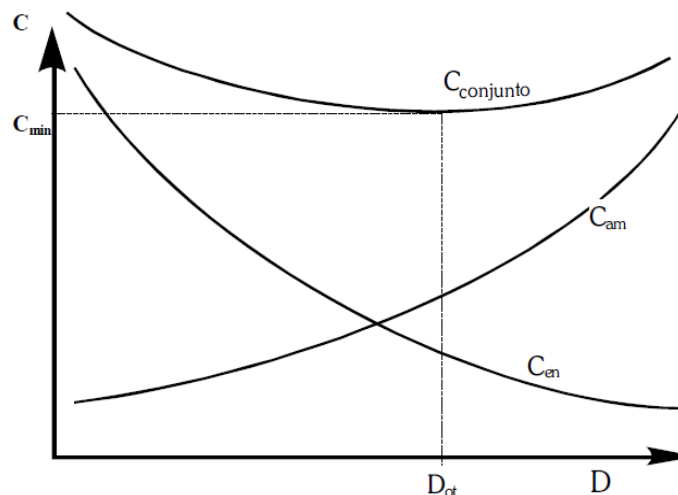


Figura 1: Variação do custo total do sistema de recalque, segundo o diâmetro da adutora.

ALGORITMOS EVOLUCIONÁRIOS

Os algoritmos evolucionários são técnicas numéricas de otimização e busca baseadas no processo de evolução de seres vivos e o comportamento social de animais e insetos, ou seja, técnicas de otimização inspiradas em analogias com a natureza (BRAVO, COLLISCHONN e TUCCI, 2009).

Segundo Bravo, Collischonn e Tucci (2009), um dos algoritmos evolucionários bastante utilizados em aplicações com sucesso nas áreas de recursos hídricos é o Algoritmo genético multiobjectivos (YEH e LABADIE, 1997), e a de otimização por enxame (ou nuvem) de partículas (*Particle Swarm Optimization*, PSO) no dimensionamento ótimo de redes de adução de água (AYALA e COELHO, 2007).

OTIMIZAÇÃO POR ENXAME DE PARTÍCULAS - PSO

O algoritmo Otimização por Enxame de Partículas, em inglês *Particle Swarm Optimization*, foi desenvolvido pelo psicólogo social James Kennedy e o engenheiro eletricitista Russel Eberhart em 1995 (KENNEDY e EBERHART, 1995). Este foi inspirado no comportamento e na dinâmica do “comportamento social” observado em muitas espécies de pássaros, insetos, cardumes de peixes e até mesmo do comportamento social humano, para tratar problemas no domínio contínuo.

No algoritmo PSO, os indivíduos da população são representados por pontos, denominados de partículas, que voam em um espaço de busca. As variações nos atributos desses pontos levam a novos pontos no espaço, ou seja, correspondem a movimentações no espaço. Uma ideia inspirada em sistemas cognitivos é a de que essas partículas tenderão a mover-se em direção umas das outras e irão influenciar umas às outras.

A maior parte dos algoritmos de PSO empregam dois princípios sócio-métricos do movimento das partículas: a melhor posição no espaço de busca já percorrida por alguma das partículas (gB) associada a todo o enxame e a melhor posição individual que cada partícula já percorreu no espaço (pB) que é associada a cada partícula do enxame. Ambas as métricas são medidas por uma função de aptidão, $f(p)$, também chamada função objetivo ou de aptidão (fitness), que corresponde à otimização do problema.

A influência exercida pelas métricas gB e pB no movimento das partículas pode ser definida por duas constantes, a saber: o fator social (ϕS) e o fator cognitivo (ϕC). O primeiro princípio conecta conceitualmente todos os membros de uma população entre si. Como consequência, o comportamento de cada partícula é influenciado pelo comportamento de todas as outras partículas. A segunda métrica (pB) cria uma vizinhança para cada indivíduo composta por ele próprio e seus vizinhos mais próximos. Além disso, a capacidade de exploração do espaço de busca pela partícula é controlada pelo fator de inércia (ω). Assim, uma partícula irá se mover em uma determinada direção que é função da posição atual $x_i(t)$, de sua velocidade $v_i(t)$, da posição da

partícula que levou ao seu melhor desempenho até o momento e do melhor desempenho global do sistema até o momento (gB). A velocidade da partícula será ajustada pela equação 10.

$$v_{i(t+1)} = \omega \times v_{i(t)} + \phi C \times (pB - x_{i(t)}) + \phi S \times (gB - x_{i(t)}) \quad \text{equação (10)}$$

Na qual, ϕ_1 e ϕ_2 são constantes limitadas a um intervalo finito. Kennedy e Eberhart (1995) denominaram as constantes como os componentes "cognitivo" e "social", respectivamente.

Após o cálculo da velocidade da partícula, a posição da partícula "i" na próxima iteração é estabelecida como uma influência aditiva da posição antiga e da velocidade calculada, sendo expressa pela Equação 11.

$$x_{i(t+1)} = x_{i(t)} + v_{i(t+1)} \quad \text{equação(11)}$$

Para limitar a velocidade de uma partícula, para que o sistema não extrapole o espaço de busca, são impostos limites para seus valores em cada dimensão do espaço de busca. O algoritmo PSO é executado repetidamente até que o critério de parada seja alcançado ou as mudanças nas velocidades das partículas estejam próximas do valor zero.

ALGORITMO GENÉTICO - GA

Algoritmos Genéticos são inspirados no princípio Darwiniano da evolução das espécies e na genética. São algoritmos probabilísticos que fornecem um mecanismo de busca paralela e adaptativa baseado no princípio de sobrevivência dos mais aptos e na reprodução. Este artigo introduz as técnicas computacionais inteligentes, Redes Neurais, Lógica Fuzzy e Sistemas Especialistas, e apresenta os princípios básicos e aplicações dos Algoritmos Genéticos (PACHECO, 1999).

Segundo Holland (1975), o processo de evolução das espécies se decompõe nas etapas de inicialização, avaliação, seleção, cruzamento, mutação, atualização e finalização. Basicamente, o que um algoritmo genético faz é criar uma população de possíveis respostas para o problema a ser tratado (inicialização) para depois submetê-la ao processo de evolução, constituído pelas etapas acima citadas, tendo como um dos fatores principais: o número da população envolvida no cálculo. A rotina que calcula no Matlab, fazendo-se uso desse método é a **ga**. Essa rotina é bem complexa, com parâmetros diversos que podem ser alterados pelo usuário, tornando esse tipo de programação bem interativa.

Muitos parâmetros precisam ser ajustados de modo a se ter uma busca mais efetiva dos resultados. Entre os parâmetros envolvidos, há o tamanho da População, que determina o quantitativo de cromossomos presente e consequentemente o tamanho da população em uma geração (ciclo), fator esse que influencia na possibilidade de Cruzamento, que dita à frequência que novos cromossomos não serão a cópia exata do pai, mantendo uma geração de cromossomos diferentes dos anteriores. Outro fator é a Probabilidade de Mutação, que dita à frequência com que os cromossomos sofreram mutação, ou seja, quantos cromossomos irão ser alterados (PACHECO, 1999).

EXEMPLO

Esse projeto de pesquisa procura a minimização dos custos envolvidos na implantação de uma instalação de recalque, em função do diâmetro (diâmetro ótimo) de implantação nesse sistema. Para isso diversas informações sobre custos comerciais de tubulações e serviços envolvidos, taxas de aumento anual de energia elétrica, entre outras informações, devem ser consideradas.

O exemplo foi apresentado originalmente por Gomes (2004), uma instalação de recalque que com um desnível de 30 metros e uma extensão de 2000 metros de tubulação. O valor da pressão residual no ponto de deságue é desprezível e a vazão requerida é de 40 l/s. Os demais dados necessários para o dimensionamento são:

- Somatório dos coeficientes das perdas localizadas na instalação: $\Sigma K = 15m$;
- Rendimento esperado do conjunto motor-bombas: $\eta = 0,75$;

- Viscosidade cinemática da água a 20°C: $\nu = 1,004 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$;
- Preço do kWh: $p = \text{R\$ } 0,063$;
- Período de exploração em anos: $n = 30$;
- Número médio anual de horas de bombeamento: $N_b = 5.840$;
- Taxa de juro anual: $i = 12 \%$;
- Taxa de aumento anual da energia: $e = 6 \%$;

Deverão ser utilizados tubos de PVC (rugosidade absoluta de 0,02 mm), cujos custos unitários estão apresentados na Tabela 1 (já estão incluídos os custos de transporte).

Tabela 1 – Custo dos tubos de PVC com classe de pressão de 1 Mpa

DIÂMETRO NOMINAL (DN)	DIÂMETRO INTERNO (mm)	CUSTO (R\$/m)
50	53,4	3,54
75	75,6	6,74
100	108,4	12,80
150	156,4	23,41
200	204,2	39,24
250	252,0	58,52
300	299,8	83,12

Para o custo de implantação do tubo, a geratriz superior de tubulação estará a 2,0 m de profundidade, a inclinação do talude da vala será igual a 0,2, e a largura da base da vala é de D (diâmetro do tubo em metros) mais 0,6 metros (com 0,3m para cada lado).

Os custos unitários de montagem são apresentados na Tabela 2. Os custos dos tubos de montagem e do kWh, deste exemplo, foram os praticados no ano 2000.

Tabela 2 – Custo do movimento de terra

MOVIMENTO DE TERRA	CUSTO
Escavação	3,50 R\$/ m ³
Aterro	1,20 R\$/ m ³
Bota-Fora	0,50 R\$/ m ³
Pavimento	2,10 R\$/ m ³

Na Tabela 3, há o preço de escavação, aterro, bota-fora e reposição do pavimento para o DN 150, 200 e 250, calculados em função dos custos unitários (em reais por metro) apresentados na Tabela 2, e os dados de implantação do tubo.

Tabela 3 – Custo de implantação das tubulações, por metro de comprimento

	CUSTO (R\$/ m)		
	DN 150	DN 200	DN 250
Escavação	8,88	9,55	10,24
Aterro	3,02	3,23	3,45
Bota-Fora	0,01	0,02	0,03
Reposição do pavimento	3,38	3,52	3,67
Subtotal da montagem	15,29	16,32	17,39
Custo do tubo, por metro	23,41	39,24	58,52
Custo total de implantação	38,70	55,56	75,91
Valores de λ (R\$/ m / m)	247,09	272,09	301,23

Por fim, fazendo-se uso do método fundamentado na variação linear e do custo das tubulações, o diâmetro ótimo será obtido variando-se o seu valor na equação 10, tendo como fator finalizador de busca, o diâmetro que apresentar ótimo, ou seja, aquele que aplicado a equação 10, apresentou o menor custo total.

RESULTADOS OBTIDOS

Para os dois métodos, o critério de parada foi o número máximo de 100 iterações/gerações e/ou uma tolerância de 10^{-5} (para o custo total que é calculado em Reais), na solução desse problema, e coletando diversas informações a cada iteração. O programa PSO foi executado utilizando uma população de 100, 50, 25, 10 e 5 partículas, onde se tirou diversas informações, como mostrado na Tabela 1

Tabela 1: Parâmetros Resultantes da Iteração com 100, 50, 25, 10 e 5 Partículas com o PSO.

PARÂMETROS	PARTÍCULAS					UNIDADES
	100	50	25	10	5	
Diâmetro Encontrado	221,36	221,36	221,40	221,40	221,36	Mm
Diâmetro ótimo comercial	200	200	200	200	200	Mm
Custo Total	209.930,76	209.930,76	209.930,76	209.930,77	209.930,76	R\$
Número de Iterações efetuadas	55	36	32	64	65	-----

Em seguida, para o mesmo exemplo, foi-se utilizado o método heurístico de Algoritmos Genéticos variando-se o número de populações, mantendo a mutação em 0,5% e o número de gerações em 100, diante disso tirou-se diversas informações como mostrado na Tabela 2.

Tabela 2: Parâmetros Resultantes da Iteração com uma População de 60, 30, 25, 10 e 5 com o GA

PARÂMETROS	POPULAÇÃO					UNIDADES
	60	30	15	10	5	
Diâmetro Encontrado	221,35	221,38	221,37	221,38	221,38	Mm
Diâmetro ótimo comercial	200	200	200	200	200	Mm
Custo Total	209.930,76	209.930,76	209.930,78	209.930,76	209.930,76	R\$
Número de gerações	51	51	51	51	51	-----
Número de funções avaliadas	1040	1040	1040	1040	1040	-----

Para melhor entendimento dos métodos e interpretação dos resultados, fizeram-se uso de gráficos, nos quais percebeu-se como foi o comportamento a cada variação de determinados parâmetros presentes em cada método.

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O diâmetro ótimo e o custo total teórico obtido em Gomes (2004) foram de 0,221m e R\$ 222.459,88, respectivamente. O valor teórico do diâmetro ótimo para ambos os métodos foram de 0,221m, obtendo assim sucesso na busca. Esse resultado foi obtido independente do número de partículas atribuídas no PSO ou da população em cada geração no GA. Porém o valor do custo encontrado pelos dois métodos, diferem do resultado obtido em Gomes (2004), cerca de 5,63%, que calcula o custo para o diâmetro comercial mais próximo do valor encontrado (DN 200). Enquanto os programas calculam para o diâmetro encontrado, fato que se corrige ao recalculando o custo total com o novo diâmetro.

Não há variação significativa do tempo de iteração, tendo a tolerância como fator determinante como critério de parada em todos os casos, porém o exemplo analisado é simples, ficando para trabalhos futuros a análise do tempo de iteração aliado ao número de iterações em Redes de Abastecimento de Água (SAA).

No entanto, percebe-se que o resultado pelo método GA é obtido com um número constante de gerações e de funções avaliadas, demonstrando uma repetição lógica na busca do diâmetro ótimo, enquanto o PSO demonstra uma variabilidade com o número de partículas inseridas, isto ocorre devido à aleatoriedade na distribuição das partículas no gráfico (valores da função objetivo), concluindo que o mesmo poderá encontrar a solução com mais rapidez ou com uma maior demora.

CONCLUSÕES

Constata-se que o resultado é alcançado para os dois métodos, demonstrando que os mesmos são boas opções na busca de resultados ótimos. A(s) tolerância/gerações foram os únicos critérios de parada em todas as iterações realizadas. Um detalhe bastante importante está na quantidade de partículas (PSO) ou população (GA), onde uma pequena quantidade desses parâmetros nesses dois métodos respectivamente nos levou ao mesmo resultado quando comparado com uma maior quantidade, havendo irrisórias variações e se mostrando eficientes na resolução deste problema. Contudo, é possível perceber que para redes de distribuição com grandes extensões, o GA apresentará um maior custo computacional, devido a sua complexidade computacional, que mostra ser maior do que o PSO. Segundo Toscani e Veloso (2001), o termo complexidade computacional refere-se aos requerimentos de recursos necessários para que o algoritmo possa resolver um problema sob o ponto de vista computacional. Concluindo que o método GA demonstrou uma maior quantidade de trabalho despendido devido a sua complexidade e pelo quantitativo de funções analisadas por ele a cada geração.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. GOMES, H. P.; BEZERRA, S. T. M.; CARVALHO, P. S. O.; SALVINO, M. M. *Optimal Dimensioning Model of Water Distribution Systems*. *Water S. A.*, v. 35, p. 421-432, 2009.
2. GOMES, Heber Pimentel. *Sistemas de Abastecimento de Água: Dimensionamento Econômico e Operação de Redes e Elevatórias*. 2ª Edição. 242p. Editora Universitária-UFPB, 2004.
3. JACOBY, S. L. S. *Design of Optimal Hydraulic Network*. *Journal Hydraulic Division American Society Civil Engineering*, v. 94, n. HY3, p. 641-661, 1968.
4. KARMELLI, D.; GADISH, Y.; MEYERS, S. Design of Optimal Water Distribution Networks. *Journal of Pipeline Division, ASCE*, v. 94, n. 10, p. 1-10, 1968.
5. KENNEDY, J.; EBERHART, R. C. *Particle Swam Optimization*. In: *IEEE International Conference on Neural Networks, IEEE Service Center, Piscataway, NJ, N: 1942-1948, Path, Australia, 1995*.
6. LIANG, T. *Design Conduit System by Dynamic Programming*. *Journal of the Hydraulics Division*, v. 97, n. HY3, p. 383-393, 1971.
7. MEDEIROS, G. F.; KRIPKA, M. *Heuristic Optimization Methods Applied in Structural Optimization*. *Revista CIATEC - UPF*, v. 4, n. 1, p. 19-32, 2012.
8. VELOSO, Paulo AS, and Laira Vieira TOSCANI. "Complexidade de Algoritmos: Análise, Projeto e Métodos." Editora Sagra Luzzatto, 1ª edição(2001).
9. PACHECO, M. A. Ci. "Algoritmos genéticos: princípios e aplicações." ICA: Laboratório de Inteligência Computacional Aplicada. Departamento de Engenharia Elétrica. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Fonte desconhecida (1999)
10. HOLLAND, J. *Adaptation in natural and artificial systems*. *Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1975*.